Stationary Phase 法による高次項の評価（１次元の場合）

2010/06　鈴木幸人

$G \subset \mathbb{R}$ を開集合とする。

補題 3.3（Lemma of Morse）点 $a \in G$ を函数 $h \in C^\infty(G)$ の正則臨界点（regular critical point）とし、$h''(a) = \lambda$ とする。そのとき、a の近傍 $U \subset G$ で定義された函数 $\eta \in C^\infty(U)$ が存在し

(i) $\eta(a) = 0,\ \dfrac{d\eta}{d\xi}(a) = 1$

(ii) 0 *の近傍* V_0 *が存在して* $\eta \in V_0 \Rightarrow h\big(\xi(\eta)\big) = h(a) + \dfrac{1}{2}\lambda\eta^2$

が成り立つ [1]。さらに、高階導関数に関して

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}(a) = \frac{1}{3\lambda}h'''(a),$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3}(a) = -\frac{1}{12\lambda^2}[h'''(a)]^2 + \frac{1}{4\lambda}h^{(4)}(a)$$

が成り立つ。

（証明）

座標系 ξ を $a = 0$ となるように選び、$h(a) = 0$ であると仮定する。そのとき $h(0) = 0$ である [2]から、a の近傍 $U \subset G$ で定義される滑らかな函数 $\phi: U \to \mathbb{R}$ で

$$h(\xi) = \xi\phi(\xi) \qquad \textbf{(i)}$$

および

$$h'(0) = \phi(0) \qquad \textbf{(ii)}$$

を満たすものが存在する。実際、函数 $f: [0,1] \times U \to \mathbb{R}$ を

$$f(\theta;\xi) = h(\theta\xi)$$

と定義すると $f \in C^1([0,1] \times U)$ であり

$$f(0;\xi) = h(0) = 0, \quad f(1;\xi) = h(\xi)$$

であるから

$$h(\xi) = f(1;\xi) - f(0;\xi) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(\theta;\xi)d\theta$$

$$= \int_0^1 \xi h'(\theta\xi)d\theta = \xi\int_0^1 h'(\theta\xi)d\theta$$

---

[1] (i)より $a \in U$ の近傍 $U_0 \subset U$ と $0 \in \eta(U)$ の近傍 $V_0 \subset \eta(U)$ が存在して $\eta: U_0 \to V_0$ が微分同相写像となる。したがって、その逆写像 $\xi: V_0 \to U_0$ が存在する。

[2] 一般に、函数 $f: M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$ と点 $p \in M$ の近傍 $U_p \subset M$ の座標系 $x: U_p \to \mathbb{R}^m$ において $f(x) = f \circ x^{-1}\big(x(p)\big) = f(p)$ と略記する。

が成り立つ。そこで

$$\phi(\xi) = \int_0^1 h'(\theta\xi) d\theta$$

とすれば(i)式と(ii)式が成り立つ。更に、点 $\xi(a) = 0$ は函数 h の臨界点であるから、(ii)式は

$$\phi(0) = h'(0) = 0$$

となる。したがって上記と同様の議論により、a の近傍 $U \subset G$ で定義される滑らかな函数 $\psi: U \to \mathbb{R}$ で

$$\phi(\xi) = \xi\psi(\xi) \tag{iii}$$

および

$$\phi'(0) = \psi(0) \tag{iv}$$

を満たすものが存在する。具体的には

$$\psi(\xi) = \int_0^1 \phi'(\theta\xi) d\theta = \int_0^1 \int_0^1 h''(\mu\theta\xi)\mu d\mu\, d\theta$$

である[3]。

(i)式と(iii)式より

$$h(\xi) = \xi\phi(\xi) = \xi^2\psi(\xi) \tag{v}$$

である。この両辺の二階微分を計算すると

$$h''(\xi) = 2\psi(\xi) + 4\xi\psi'(\xi) + \xi^2\psi''(\xi)$$

であるから[4]

$$h''(0) = 2\psi(0)$$

が得られる。函数 h は点 $\xi(a) = 0$ で正則（regular）であるから

$$\psi(0) = \lambda/2 \neq 0$$

であるが、$\psi: U \to \mathbb{R}$ は連続函数であるから、点 a の近傍 $U_1 \subset U$ で

$$p \in U_1 \Rightarrow \psi(p) \neq 0$$

となるようなものが存在する。

そこで

$$\eta(\xi) = \sqrt{\frac{|\psi(\xi)|}{|\psi(0)|}}\xi$$

と定義し、U_1 上の座標系 η を考える。そのとき

---

[3] $\phi(\xi) = \int_0^1 h'(\theta\xi) d\theta$ より $\phi'(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_0^1 h'(\theta\xi) d\theta = \int_0^1 h''(\theta\xi)\theta d\theta$ である。

[4] $h'(\xi) = 2\xi\psi(\xi) + \xi^2\psi'(\xi)$ である。

$$\eta(0)=0,\ \ \frac{d\eta}{d\xi}(0)=\left[\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\frac{|\psi(\xi)|}{|\psi(0)|}}\right)\xi+\sqrt{\frac{|\psi(\xi)|}{|\psi(0)|}}\right]_{\xi=0}=1$$

である。また

$$\eta^2(\xi)=\frac{|\psi(\xi)|}{|\psi(0)|}\xi^2=\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}\xi^2$$

であるから[5]、(v)式より

$$h(\xi)=\xi^2\psi(\xi)=\frac{\lambda}{2}\eta^2(\xi)$$

が得られる。

さらに

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}(0)=\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\xi+\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)+\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\right]_{\xi=0}$$

$$=\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\xi+2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}\right)^{-1/2}\frac{2}{\lambda}\psi'(\xi)\right)\right]_{\xi=0}$$

$$=\left[\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\xi+\frac{2}{\lambda}\left(\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}\right)^{-1/2}\psi'(\xi)\right]_{\xi=0}=\frac{2}{\lambda}\psi'(0)$$

および

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3}(0)=\left[\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\xi+\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)+2\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\right]_{\xi=0}$$

$$=\left[\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\xi+3\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}\right)^{-1/2}\psi'(\xi)\right)\right]_{\xi=0}$$

$$=\left[\frac{d^3}{d\xi^3}\left(\sqrt{\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}}\right)\xi\right.$$

$$\left.+3\left(-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}\right)^{-3/2}\frac{2}{\lambda}[\psi'(\xi)]^2+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\psi(\xi)}{\lambda/2}\right)^{-1/2}\psi''(\xi)\right)\right]_{\xi=0}$$

$$=-\frac{3}{\lambda^2}[\psi'(0)]^2+\frac{3}{\lambda}\psi''(0)$$

---

[5] $p\in U_1\Rightarrow\psi(p)\neq 0$ より、U_1 において $\psi(p)$ は同符号である。

が得られるが、(v)式より

$$
\begin{aligned}
h''(\xi) &= 2\psi(\xi) + 4\xi\psi'(\xi) + \xi^2\psi''(\xi),\\
h'''(\xi) &= 2\psi'(\xi) + 4[\psi'(\xi) + \xi\psi''(\xi)] + 2\xi\psi''(\xi) + \xi^2\psi'''(\xi)\\
&= 6\psi'(\xi) + 6\xi\psi''(\xi) + \xi^2\psi'''(\xi),\\
h^{(4)}(\xi) &= 6\psi''(\xi) + 6[\psi''(\xi) + \xi\psi'''(\xi)] + 2\xi\psi'''(\xi) + \xi^2\psi^{(4)}(\xi)\\
&= 12\psi''(\xi) + 8\xi\psi'''(\xi) + \xi^2\psi^{(4)}(\xi)
\end{aligned}
$$

したがって

$$h''(0) = 2\psi(0),\ \ h'''(0) = 6\psi'(0),\ \ h^{(4)}(0) = 12\psi''(0)$$

であるから

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}(0) = \frac{2}{\lambda}\psi'(0) = \frac{1}{3\lambda}h'''(0),$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3}(0) = -\frac{3}{\lambda^2}[\psi'(0)]^2 + \frac{3}{\lambda}\psi''(0) = -\frac{1}{12\lambda^2}[h'''(0)]^2 + \frac{1}{4\lambda}h^{(4)}(0)$$

となる。

■

系 3.4　正則臨界点は孤立している。

The method of stationary phase in 1 dimension

$G \subset \mathbb{R}$ を開集合とし、函数 $h: G \to \mathbb{R}$ と $g: G \to \mathbb{C}$ はそれぞれ $h \in C^\infty(G)$ および $g \in C_0^\infty(G)$ であるとする。このとき、次の形の積分で定義される函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$f(t) = \int_G e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi \tag{1}$$

の $|t| \to \infty$ のときの様子を調べる。

定理 3.5　(i) $\operatorname{supp} g$ の点が全て h の正常点、すなわち $\forall\xi \in \operatorname{supp} g, h'(\xi) \neq 0$ であるならば、任意の $\nu > 0$ に対し

$$f(t) = O(|t|^{-\nu}) \ \text{ as } |t| \to \infty \tag{2}$$

が成り立つ。

(ii) 函数 h が $\operatorname{supp} g$ 上に有限個の正則臨界点 $a^{(1)}, \dots, a^{(r)}$ をもつものとする。そのとき次の漸近公式（asymptotic formula）が成り立つ：

$$f(t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{r} \frac{g\left(a^{(l)}\right)}{\sqrt{|h''(a^{(l)})|}} e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} h''(a^{(l)}) \operatorname{sgn} t} e^{ith(a^{(l)})} |t|^{-\frac{1}{2}} + O\left(|t|^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{3}$$

$$\text{as } |t| \to \infty$$

ただし sgn ∗ は ∗ の符号を表す。

（証明）

(i) 一般に

$$\frac{\partial}{\partial\xi}e^{ith(\xi)} = ith'(\xi)e^{ith(\xi)}$$

したがって、すべての $\xi \in \operatorname{supp} g$ において $h'(\xi) \neq 0$ であるから

$$e^{ith(\xi)} = \frac{1}{ith'(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}e^{ith(\xi)}$$

が成り立つ。これを用いると（$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して）

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_G e^{ith(\xi)}g(\xi)d\xi = \int_{\operatorname{supp} g} e^{ith(\xi)}g(\xi)d\xi \\
&= \int_{\operatorname{supp} g}\left[\frac{1}{ith'(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}e^{ith(\xi)}\right]g(\xi)d\xi \\
&= \int_{\operatorname{supp} g}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{e^{ith(\xi)}}{ith'(\xi)}g(\xi)\right]d\xi - \int_{\operatorname{supp} g} e^{ith(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{g(\xi)}{ith'(\xi)}\right]d\xi \\
&= -\frac{1}{it}\int_{\operatorname{supp} g} e^{ith(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{g(\xi)}{h'(\xi)}\right]d\xi \\
&= -\frac{1}{it}\int_{\operatorname{supp} g}\left[\frac{1}{ith'(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}e^{ith(\xi)}\right]g_1(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{(-it)^2}\int_{\operatorname{supp} g} e^{ith(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{g_1(\xi)}{h'(\xi)}\right]d\xi = \cdots \\
&= \frac{1}{(-it)^n}\int_{\operatorname{supp} g} e^{ith(\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{g_{n-1}(\xi)}{h'(\xi)}\right]d\xi
\end{aligned}$$

ただし

$$g_k(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{g_{k-1}(\xi)}{h'(\xi)}\right] \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

$$g_0(\xi) = g(\xi)$$

が得られる。ここで $\forall\xi \in \operatorname{supp} g, h'(\xi) \neq 0$ および $h, g \in C^\infty(\operatorname{supp} g)$ より

$$g_k \in C^\infty(\operatorname{supp} g) \subset L_1(\operatorname{supp} g) \quad \left(\because g \in C_0^\infty(G)\right)$$

であるから

$$f(t) = O(t^{-n}) \quad \text{as } t \to \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が得られる。

(ii) $g \in C_0^\infty(G)$ であるから、(1)式の積分は任意の大きさのsupportをもつ函数 g に対する積分の有限個の和として表すことができる[6]。そこで、以下では $\operatorname{supp} g$ は適宜十分小さな

---

[6] 実際 $\operatorname{supp} g$ はコンパクトであるから、任意の $\epsilon > 0$ に対して
$\operatorname{supp} g \subset \cup_{i=1}^N \operatorname{supp} \varphi_i, \quad \xi \in \operatorname{supp} g \Rightarrow \sum_{i=1}^N \varphi_i(\xi) = 1,$
$\forall i \in \{1, \dots, N\},\ \operatorname{diag}(\operatorname{supp} \varphi_i) = \sup_{x,y \in \operatorname{supp} \varphi_i}|x - y| < \epsilon$

領域に含まれるものと仮定する。特に、正則臨界点は孤立点であるから、$\mathrm{supp}\, g$ には唯一つの正則臨界点 a のみが存在すると仮定することができる。

Morse の lemma より、点 $a \in \mathrm{supp}\, g$ の近傍 $U_a \subset \mathbb{R}$ から原点の近傍 $V_0 \subset \mathbb{R}$ への微分同相写像 $\eta: U_a \to V_0$ で

$$\eta(a) = 0, \quad \frac{d\eta}{d\xi}(a)\left(= \left[\frac{d\xi}{d\eta}(0)\right]^{-1}\right) = 1 \tag{4}$$

を満たし[7]、函数 h を V_0 上で

$$h(\xi(\eta)) = h(a) + \frac{1}{2}\lambda\eta^2 \tag{5}$$

と表すことができるものが存在する。ここで $\lambda = h''(a)$ で、$\xi: V_0 \to U_a$ は微分同相写像 $\eta: U_a \to V_0$ の逆写像を表す。なお、上記のように $\mathrm{supp}\, g$ は十分小さな領域に含まれると仮定しているから、特に $g \in C_0^\infty(U_a)$ であり（したがって $g \circ \xi \in C_0^\infty(V_0)$ である）さらに V_0 は $V_0 = (-2r_g, 2r_g)$ ただし $r_g = \sup_{\eta \in \mathrm{supp}\, g\circ\xi} |\eta|$ と表せるものとする。この座標変換を用いると、(1)式の積分は

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_G e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi = \int_{U_a} e^{ith(\xi)} g(\xi) d\xi \\ &= \int_{V_0} e^{it\left[h(a)+\frac{1}{2}\lambda\eta^2\right]} g(\xi(\eta)) \frac{d\xi}{d\eta}(\eta) d\eta \\ &= e^{ith(a)} \int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2} \psi(\eta) d\eta \end{aligned} \tag{6}$$

ただし

$$\psi(\eta) = g(\xi(\eta)) \frac{d\xi}{d\eta}(\eta)$$

と表される。このとき、(5)式より

$$\psi(0) = g(\xi(0)) \frac{d\xi}{d\eta}(0) = g(a) \tag{7}$$

である。

そこで、積分

なる函数 $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_0^\infty(G)$ が存在する。これを用いると、(1)式の積分は

$$f(t) = \int_G e^{ith(\xi)} g(\xi) \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i(\xi)\right) d\xi = \sum_{i=1}^N \int_G e^{ith(\xi)} g(\xi) \varphi_i(\xi) d\xi$$

と表され、すべての $i \in \{1, \dots, N\}$ に対して

$$\mathrm{diag}(\mathrm{supp}\, g\varphi_i) \le \mathrm{diag}(\mathrm{supp}\, \varphi_i) < \epsilon$$

が成り立つ。

[7] $d\eta/d\xi$ は連続であるから、$d\eta/d\xi(a) = 1$ より点 a のある近傍上で $d\eta/d\xi \neq 0$ であり、したがって最初から $\xi \in U_a \Rightarrow d\eta/d\xi(\xi) \neq 0$ であると仮定することができる。すなわち、$d\eta/d\xi(a) = 1$ の条件によって、写像 $\eta \in C^\infty(U_a)$ が微分同相写像であるとすることが正当化される。

$$J(t)=\int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\psi(\eta)d\eta \tag{8}$$

の $|t|\to\infty$ のときの挙動を調べる。まず偶関数 $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で

$$\rho(s)=\begin{cases}1 & \text{for } |s|\le \sup\limits_{\eta\in\operatorname{supp}\psi}|\eta| \\ 0 & \text{for } |s|\ge 2r_g\end{cases} \tag{9}$$

となるもの[8]をとると(9)式の積分は

$$J(t)=\int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\psi(\eta)\rho(\eta)d\eta \tag{10}$$

と表される。また $\psi\in C^\infty(V_0)$ であるから Taylor 級数展開により

$$\psi(\eta)=\psi(0)+\sum_{j=1}^{N-1}a_j\eta^j+b_N(\eta)\eta^N \tag{11}$$

ただし

$$a_j=\frac{1}{j!}\frac{d^j\psi}{d\eta^j}(0),\quad b_N(\eta)=\frac{1}{(N-1)!}\int_0^1(1-\theta)^{N-1}\frac{d^N}{d\theta^N}\psi(\theta\eta)d\theta$$

と表すことができる[9]。これを(12)式に代入すると

8 $\operatorname{supp}\psi\subset\operatorname{supp} g\circ\xi$ であるから $\sup_{\eta\in\operatorname{supp}\psi}|\eta|\le\sup_{\eta\in\operatorname{supp} g\circ\xi}|\eta|=r_g<2r_g$ が成り立つ。

9 $$\begin{aligned}\psi(\eta)-\psi(0)&=\int_0^1\frac{d}{d\theta}\psi(\theta\eta)d\theta=\left[(\theta-1)\frac{d}{d\theta}\psi(\theta\eta)\right]_{\theta=0}^{\theta=1}-\int_0^1(\theta-1)\frac{d^2}{d\theta^2}\psi(\theta\eta)d\theta\\
&=[\eta\psi'(\theta\eta)]_{\theta=0}+\int_0^1(1-\theta)\frac{d^2}{d\theta^2}\psi(\theta\eta)d\theta\\
&=\eta\psi'(0)+\left[-\frac{1}{2}(1-\theta)^2\frac{d^2}{d\theta^2}\psi(\theta\eta)\right]_{\theta=0}^{\theta=1}-\int_0^1-\frac{1}{2}(1-\theta)^2\frac{d^3}{d\theta^3}\psi(\theta\eta)d\theta\\
&=\eta\psi'(0)+\left[\frac{1}{2}\eta^2\psi''(\theta\eta)\right]_{\theta=0}+\int_0^1\frac{1}{2}(1-\theta)^2\frac{d^3}{d\theta^3}\psi(\theta\eta)d\theta\\
&=\eta\psi'(0)+\frac{1}{2}\eta^2\psi''(0)\\
&\quad+\left[-\frac{1}{2\cdot3}(1-\theta)^3\frac{d^2}{d\theta^2}\psi(\theta\eta)\right]_{\theta=0}^{\theta=1}-\int_0^1-\frac{1}{2\cdot3}(1-\theta)^3\frac{d^4}{d\theta^4}\psi(\theta\eta)d\theta\\
&=\eta\psi'(0)+\frac{1}{2}\eta^2\psi''(0)+\frac{1}{3!}\eta^3\psi'''(0)+\int_0^1\frac{1}{3!}(1-\theta)^3\frac{d^4}{d\theta^4}\psi(\theta\eta)d\theta=\cdots\\
&=\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j!}\psi^{(j)}(0)+\int_0^1\frac{1}{(N-1)!}(1-\theta)^{N-1}\frac{d^N}{d\theta^N}\psi(\theta\eta)d\theta\end{aligned}$$

である。

$$J(t)=\int_{V_0} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\left[\psi(0)+\sum_{j=1}^{N-1} a_j\eta^j+b_N(\eta)\eta^N\right]d\eta$$

$$=\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\left[\psi(0)+\sum_{j=1}^{N-1} a_j\eta^j+b_N(\eta)\eta^N\right]d\eta$$

$$=\psi(0)\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)d\eta+\sum_{j=1}^{N-1} a_j\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\eta^j d\eta$$

$$+\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)b_N(\eta)\eta^N d\eta$$

であり [10]、したがって

$$J(t)=J_1(t)+J_2(t)+J_3(t),$$

$$J_1(t)=\psi(0)\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)d\eta,$$

$$J_2(t)=\sum_{j=1}^{N-1} a_j\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\eta^j d\eta, \tag{12}$$

$$J_3(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)b_N(\eta)\eta^N d\eta$$

が得られる。

$J_1(t)$ の積分は次のように表すことができる [11]。

$$J_{10}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)d\eta$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}d\eta+\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}[\rho(\eta)-1]d\eta \tag{13}$$

この右辺第 1 項は、$s=\sqrt{|\lambda t|/2}\cdot\eta$ なる変数変換を施すと

$$\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}d\eta=\int_{-R}^{R} e^{is^2\mathrm{sgn}(\lambda t)}\sqrt{\frac{2}{|\lambda t|}}ds=\sqrt{\frac{2}{|\lambda t|}}\int_{-R}^{R} e^{is^2\mathrm{sgn}(\lambda t)}ds$$

10 二つ目の等号において、$b_N(\eta)$ の定義域を V_0 から全領域 $\mathbb{R}$ に広げているが、それは例えば $\eta\in\mathbb{R}\setminus V_0 \Rightarrow b_N(\eta)=0$ と解釈する。$\mathrm{supp}\,\rho\subset V_0$ であるから、$b_N(\eta)$ の定義域の拡張は積分の値に影響を与えない。

11 以下に示されるように

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}d\eta\right|<\infty \text{ および } \left|\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}[\rho(\eta)-1]d\eta\right|<\infty$$

であるから $J_{10}(t)$ をこのように分割することが許される。

と表せるから（変数変換：$t=(\mp is^2)^{1/2}=(\mp i)^{1/2}s=e^{\mp i\pi/4}s$ によって得られる[12]）

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{\pm is^2}ds=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{-t^2}e^{\pm i\pi/4}dt=e^{\pm i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}e^{\pm i\pi/4} \tag{14}$$

を用いると

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}d\eta=\sqrt{\frac{2}{|\lambda t|}}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{is^2\mathrm{sgn}(\lambda t)}ds=\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} \tag{15}$$

となる。第２項は、被積分関数が偶関数であるから

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}[\rho(\eta)-1]d\eta=2\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}[\rho(\eta)-1]d\eta$$

と表すことができ、部分積分により[13]（任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して）

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}[\rho(\eta)-1]d\eta\\
&=\left[e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{\rho(\eta)-1}{it\lambda\eta}\right]_{\eta=0}^{\eta=\infty}-\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\rho(\eta)-1}{it\lambda\eta}\right)d\eta\\
&=-\frac{1}{it\lambda}\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\rho(\eta)-1}{\eta}\right)d\eta\\
&=(-it\lambda)^{-1}\left\{\left[e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\rho(\eta)-1}{\eta}\right)}{it\lambda\eta}\right]_{\eta=0}^{\eta=\infty}-\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\rho(\eta)-1}{\eta}\right)}{it\lambda\eta}\right)d\eta\right\}\\
&=(-it\lambda)^{-2}\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\rho(\eta)-1}{\eta}\right)\right)d\eta=\cdots\\
&=(-it\lambda)^{-n}\int_0^\infty e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\cdots\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\rho(\eta)-1}{\eta}\right)\cdots\right)\right)d\eta
\end{aligned}$$

となる。ここで関数

$$F(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\cdots\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho(s)-1}{s}\right)\cdots\right)\right)$$

は $|s|\le\sup_{\eta\in\mathrm{supp}\,\psi}|\eta|\Rightarrow\rho(s)-1=0$ より $|s|\le\sup_{\eta\in\mathrm{supp}\,\psi}|\eta|\Rightarrow F(s)=0$ である。これと

---

[12] これは実軸上の積分路 $[-R,R]$ を複素平面上で $\pm\pi/4$ だけ回転することに相当する。この回転によって生じる差は半径 R の円周（の一部）上の積分として表され、$\left|e^{\pm i\left(Re^{i\theta}\right)^2}\right|=\left|e^{\pm iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}\right|=e^{\mp R^2\sin 2\theta}$ であるから、$R\to\infty$ としたとき、その差は $\pm$ の符号が＋のときには $0<\theta<\pi/2$ および $\pi<\theta<(3/2)\pi$ のとき、－のときには $\pi/2<\theta<\pi$ および $(3/2)\pi<\theta<2\pi$ のとき０に収束する。これによりこの積分路の回転が正当化される。

[13] $\frac{d}{d\eta}e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}=it\lambda\eta e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}$ したがって $\eta\neq0$ のとき $e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}=\frac{1}{it\lambda\eta}\frac{d}{d\eta}e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}$ となる関係を用いる。この部分積分は被積分関数 $e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}[\rho(\eta)-1]$ が $\eta=0$ の近傍で０であることによって可能となっている（例えば被積分関数が $e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)$ の場合には適用できない）。

$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ より $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ であり、また $F(s) = O(s^{-2}),\ s \to \infty$ であるから F は可積分である。したがって、(15)式の右辺第２項は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}[\rho(\eta) - 1]d\eta = O(t^{-n}),\ \ t \to \infty$$

と評価することができる。以上より(15)式の積分は

$$J_{10}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)d\eta = \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n}),\ \ t \to \infty \tag{16}$$

と表すことができ、したがって

$$J_1(t) = \psi(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n}),\ \ t \to \infty \tag{17}$$

が得られる。

$J_2(t) = \sum_{j=1}^{N-1} a_j \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\eta^j\, d\eta$ に関しては、まず（任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^2\rho(s)ds = \frac{i}{t\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(|t|^{-n}),\ \ |t| \to \infty \tag{18}$$

なる関係が成り立つことに注意する。実際

$$\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} = it\lambda s e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} \qquad \therefore\ s e^{\frac{it\lambda}{2}s^2} = \frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^2\rho(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\right)s\rho(s)ds = \frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s\rho(s)ds$$

であるが、部分積分により

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^2\rho(s)ds &= \frac{1}{it\lambda}\left\{\left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s\rho(s)\right]_{s=-\infty}^{s=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\big(s\rho(s)\big)ds\right\} \\ &= -\frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\big(\rho(s) + s\rho'(s)\big)ds\end{aligned}$$

が得られる。ここで、函数 ρ の定義（(10)式）より $|s| \le \sup_{\eta\in\mathrm{supp}\,\psi}|\eta| \Rightarrow \rho'(s) = 0$ および $\mathrm{supp}\,\rho' \subset \mathrm{supp}\,\rho \subset [-2r_g, 2r_g]$ であるから(15)式右辺第２項と同様の議論により（任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s\rho'(s)ds = O(t^{-n}),\ \ t \to \infty$$

なる評価が得られる [14]。一方、(18)式より

---

14 実際

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\rho(s)ds = J_{10}(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n}),\ \ t\to\infty$$

であるから合せて

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^2\rho(s)ds = -\frac{1}{it\lambda}\left[\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n})\right]$$

$$= \frac{i}{t\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n}),\ \ t\to\infty$$

が得られる。同様にして、任意の $b>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b}\rho(s)ds = O\left(|t|^{-\frac{2b+1}{2}}\right) \tag{19}$$

を示すことができる [15]。j が奇数のときには

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\eta^j\rho(\eta)d\eta = 0$$

であるから、$J_2(t)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s\rho'(s)ds = \left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{s\rho'(s)}{it\lambda s}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\frac{s\rho'(s)}{it\lambda s}ds = \frac{1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left[\frac{s\rho'(s)}{s}\right]ds$$
$$= \cdots = \frac{1}{(-it\lambda)^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left[\cdots\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\frac{\rho''(s)}{s}\right]ds$$

が成り立つ。

15 実際 $b\in\mathbb{N}$ ならば

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b}\rho(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\right)s^{2b-1}\rho(s)ds = \frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-1}\rho(s)ds\\
&= \frac{1}{it\lambda}\left\{\left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-1}\rho(s)\right]_{s=-\infty}^{s=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left(s^{2b-1}\rho(s)\right)ds\right\}\\
&= -\frac{1}{it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}[(2b-1)s^{2b-2}\rho(s) + s^{2b-1}\rho'(s)]ds\\
&= \frac{2b-1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-2}\rho(s)ds + O(t^{-n})\\
&= \frac{2b-1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{ds}e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\right)s^{2b-3}\rho(s)ds + O(t^{-n})\\
&= \frac{2b-1}{-it\lambda}\left\{\left[e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{s^{2b-3}\rho(s)}{it\lambda}\right]_{s=-\infty}^{s=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^{2b-3}\rho(s)}{it\lambda}\right)ds\right\} + O(t^{-n})\\
&= \frac{2b-1}{(-it\lambda)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}[(2b-3)s^{2b-4}\rho(s) + s^{2b-3}\rho'(s)]ds + O(t^{-n})\\
&= \frac{(2b-1)(2b-3)}{(-it\lambda)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-4}\rho(s)ds + O(t^{-n}) = \cdots\\
&= \frac{(2b-1)(2b-3)\cdots\left(2b-(2l-1)\right)}{(-it\lambda)^l}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}s^{2b-2l}\rho(s)ds + O(t^{-n}) = \cdots\\
&= \frac{(2b-1)(2b-3)\cdots 2\cdot 1}{(-it\lambda)^b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it\lambda}{2}s^2}\rho(s)ds + O(t^{-n})\\
&= \frac{(2b-1)(2b-3)\cdots 2\cdot 1}{(-it\lambda)^b}\left[\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O(t^{-n})\right] + O(t^{-n}) = O\left(t^{-b+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
J_2(t) &= \sum_{j=1}^{N-1} a_j \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\eta^j\, d\eta \\
&= a_2 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\eta^2 d\eta + \sum_{j=4}^{N-1} a_j \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta)\eta^j\, d\eta
\end{aligned}
\tag{20}
$$

と表すことができる。したがって(20)式および(21)式より、その漸近評価は

$$
J_2(t) = a_2 \frac{i}{t\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}} e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O\left(t^{-5/2}\right), \ \ |t| \to \infty \tag{21}
$$

となる。

$J_3(t)$ に関しても同様に処理することができる。すなわち

$$
G_0(\eta) = \rho(\eta) b_N(\eta)\eta^{N-1}
$$

$$
G_j(\eta) = \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta} G_{j-1}(\eta), \quad j = 1, \dots, N-1
$$

とおくと、$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}), b_N \in C^\infty(\mathbb{R})$ より $G_0, G_1, \dots, G_{N-1} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ であり

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta) b_N(\eta)\eta^N d\eta &= \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\eta G_0(\eta) d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{it\lambda}\cdot\frac{d}{d\eta} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\right) G_0(\eta) d\eta \\
&= \left[e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{G_0(\eta)}{it\lambda}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{G_0(\eta)}{it\lambda}\right) d\eta \\
&= \frac{1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta} G_0(\eta) d\eta = \frac{1}{-it\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\eta G_1(\eta) d\eta = \cdots \\
&= \frac{1}{(-it\lambda)^N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\frac{d}{d\eta} G_{N-1}(\eta) d\eta
\end{aligned}
$$

と部分積分することができる。したがって

$$
J_3(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it}{2}\lambda\eta^2}\rho(\eta) b_N(\eta)\eta^N d\eta = O(t^{-N}), \ \ |t| \to \infty \tag{22}
$$

であることが示される。なお、ここで $N \in \mathbb{N}$ は任意にとることができる[16]。

以上をまとめると、(19)式、(23)式および(24)式より

---

[16] 実際、(13)式の Taylor 級数展開において $N \in \mathbb{N}$ は任意にとることができ、また $J_2(t)$ の評価において N の具体的な値は結果に影響を与えない。

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)$$

$$= \psi(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + a_2\frac{i}{t\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda t|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)} + O\left(t^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$= \psi(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|t\lambda|}}e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\lambda t)}\left(1 + \frac{i}{t\lambda}\frac{a_2}{\psi(0)}\right) + O\left(t^{-\frac{5}{2}}\right)$$

が得られるが

$$\psi(0) = g(a),$$
$$\lambda = h''(a)\ (\neq 0),$$
$$a_2 = \frac{1}{2}\psi''(0) = \frac{1}{2}\{g''(a)[\xi'(0)]^3 + 3g'(a)\xi'(0)\xi''(0) + g(a)\xi'''(0)\}$$

であるから[17]、(7)式より

$$f(t) = e^{ith(a)}J(t)$$

$$= g(a)\sqrt{\frac{2\pi}{|th''(a)|}}e^{ith(a)+\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(h''(a)t)}\left(1 + \frac{i}{th''(a)}H(a)\right) + O\left(t^{-\frac{5}{2}}\right) \quad (23)$$

ただし

$$H(a) = \frac{a_2}{g(a)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{g''(a)}{g(a)}[\xi'(0)]^3 + \frac{3g'(a)}{g(a)}\xi'(0)\xi''(0) + \xi'''(0)\right\}$$

が成り立つ。

さらに

$$\xi(\eta(\xi)) = \xi,$$
$$\xi'(\eta(\xi))\eta'(\xi) = 1,$$
$$\xi''(\eta(\xi))[\eta'(\xi)]^2 + \xi'(\eta(\xi))\eta''(\xi) = 0,$$
$$\xi'''(\eta(\xi))[\eta'(\xi)]^2 + 3\xi''(\eta(\xi))\eta'(\xi)\eta''(\xi) + \xi'(\eta(\xi))\eta'''(\xi) = 0$$

より

---

[17] $\psi(\eta) = g(\xi(\eta))\xi'(\eta)$ より

$$\psi'(\eta) = g'(\xi(\eta))\xi'(\eta)\xi'(\eta) + g(\xi(\eta))\xi''(\eta) = g'(\xi(\eta))[\xi'(\eta)]^2 + g(\xi(\eta))\xi''(\eta)$$

したがって

$$\psi''(\eta) = g''(\xi(\eta))\xi'(\eta)[\xi'(\eta)]^2 + 2g'(\xi(\eta))\xi'(\eta)\xi''(\eta)$$
$$+g'(\xi(\eta))\xi'(\eta)\xi''(\eta) + g(\xi(\eta))\xi'''(\eta)$$
$$= g''(\xi(\eta))[\xi'(\eta)]^3 + 3g'(\xi(\eta))\xi'(\eta)\xi''(\eta) + g(\xi(\eta))\xi'''(\eta)$$

である。

$$\xi'(0) = \frac{1}{\eta'(a)},$$

$$\xi''(0) = -\frac{1}{[\eta'(a)]^2}\xi'(0)\eta''(a) = -\frac{\eta''(a)}{[\eta'(a)]^3},$$

$$\xi'''(0) = -\frac{1}{[\eta'(a)]^2}[3\xi''(0)\eta'(a)\eta''(a) + \xi'(0)\eta'''(a)]$$

$$= 3\frac{[\eta''(a)]^2}{[\eta'(a)]^4} - \frac{\eta'''(a)}{[\eta'(a)]^3}$$

であるが、Morse の lemma より

$$\eta(a) = 0,$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}(a) = 1,$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}(a) = \frac{1}{3h''(a)}h'''(a),$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3}(a) = -\frac{1}{12[h''(a)]^2}[h'''(a)]^2 + \frac{1}{4h''(a)}h^{(4)}(a)$$

であるから

$$\xi'(0) = \frac{1}{\eta'(a)} = 1,$$

$$\xi''(0) = -\frac{\eta''(a)}{[\eta'(a)]^3} = -\frac{h'''(a)}{3h''(a)},$$

$$\xi'''(0) = 3\frac{[\eta''(a)]^2}{[\eta'(a)]^4} - \frac{\eta'''(a)}{[\eta'(a)]^3} = \frac{[h'''(a)]^2}{3[h''(a)]^2} + \frac{[h'''(a)]^2}{12[h''(a)]^2} - \frac{h^{(4)}(a)}{4h''(a)}$$

$$= \frac{5[h'''(a)]^2}{12[h''(a)]^2} - \frac{h^{(4)}(a)}{4h''(a)}$$

したがって

$$H(a) = \frac{1}{2}\left\{\frac{g''(a)}{g(a)}[\xi'(0)]^3 + \frac{3g'(a)}{g(a)}\xi'(0)\xi''(0) + \xi'''(0)\right\}$$

$$= \frac{g''(a)}{2g(a)} + \frac{3g'(a)}{2g(a)}\left\{-\frac{h'''(a)}{3h''(a)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{5[h'''(a)]^2}{12[h''(a)]^2} - \frac{h^{(4)}(a)}{4h''(a)}\right\}$$

$$= \frac{g''(a)}{2g(a)} - \frac{1}{2}\frac{h'''(a)}{h''(a)}\frac{g'(a)}{g(a)} + \frac{5[h'''(a)]^2}{24[h''(a)]^2} - \frac{h^{(4)}(a)}{8h''(a)}$$

となる。